ARITMÉTICA MODULAR APLICADA AOS SEMÁFOROS

Marcos André Pereira Almeida[1]
Douglas Alves[2]
Ian Rodrigues Santos[3]
Kleber Passos Silva[4]

Matemática Licenciatura

cadernos de graduação
ciências exatas e tecnológicas

ISSN IMPRESSO 1980-1777
ISSN ELETRÔNICO 2316-3135

RESUMO

Este trabalho apresenta a aritmética modular aplicada ao funcionamento dos semáforos, mostrando como o mesmo se comporta no dia a dia e mostrando a matemática presente em nosso cotidiano. Aqui será visto a presença da matemática, mesmo que às vezes imperceptíveis ao olho humano, no dia-a-dia do transito. As duas aplicações dadas como exemplos neste artigo nos permitem que em determinados intervalos de tempo nós podemos passar pelo mesmo semáforo e encontra-lo aberto ou fechado, dependendo apenas de alguns segundos. Por meio das aplicações dos conceitos de congruência modular, aplicamos de maneira simples e objetiva, para definir todos os horários, durante um dia, em que isto ocorreria em cada um dos semáforos, sabendo apenas o seu funcionamento (tempo aberto, tempo fechado). Com o trabalho foi possível notar o quanto a matemática está presente em nosso cotidiano, muitas vezes sem ao menos notarmos o quanto ela é essencial para o funcionamento normal do que nos rodeia.

PALAVRAS-CHAVE

Semáforos. Congruência Modular. Aritmética.

ABSTRACT

This paper presents the modular arithmetic applied to the operation of traffic lights, showing how it behaves in everyday life and showing the present math in our daily lives. Here it will be seen the presence of mathematics, even though sometimes imperceptible to the human eye, day-to-day traffic. The two applications given as examples in this article allow for certain time intervals we can go through the same traffic and finds it open or closed, depending on just a few seconds. Through the application of modular congruence concepts, we apply a simple and objective way to define all times during one day in which this would occur in each of the traffic lights, just knowing its operation (open time, close time). With the work it was noticeable how Mathematics is present in our daily lives, often without even we notice how much it is essential for normal functioning of our surroundings.

KEYWORDS

Traffic Lights. Modular Congruence. Arithmetic.

1 INTRODUÇÃO

É evidente que existem criações do homem que são muito importantes para o desempenho do ser humano, essas que apesar de suas simplicidades contribuem de maneira impactante. O semáforo sem dúvida é uma criação genial, pois ajuda diariamente na organização da segurança do trânsito. O sistema tem um papel fundamental nos dias de hoje, controlando o trafego de veículos e pedestres nas grandes cidades.

O sistema consiste em um painel elétrico e automático que leva no seu corpo orifícios circulares cada um composto de uma cor, tais cores indicam o que o usuário tem que fazer. O verde, o vermelho e o amarelo são as cores utilizadas nesse processo, cada uma tem a sua função, e assim, o verde indica seguir em frente, o vermelho significa perigo e indica parar, já o amarelo indica atenção. Essas cores são alternadas em um determinado tempo, dependente dos estados físicos das vias e cruzamentos.

No dia 9 de dezembro de 1868 foi instalado o primeiro semáforo, criado pelo engenheiro J.P Kinght, porém, por causa de uma falha mecânica que acarretou na morte de um cidadão o projeto foi banido por quase 60 anos. Só em 1923 o afro--americano Garrett Morgan, inventou um sistema seguro automático parecido com o que usamos nos dias atuais.

Por meio de situações que vivemos no transito com os semáforos que nos forçam a parar em diversos cruzamentos e vias pelo fato de estarem fechados, introduzimos problemas que se desenvolveram a partir da aritmética modular, esta irá nos dar suporte e domínio para saber de forma exata o momento em que determinado semáforo está aberto ou fechado.

Muito antes da instalação do primeiro semáforo, em 1750, o suíço, matemático e físico Leonard Euler exibiu os primeiros indícios sobre teoria dos números, entretanto, essa ideia foi amadurecida e complementada no ano de 1801, quando foi publicado o livro *Disquisitionesrithmetica*, obra do alemão Johann Carl Friedrich Gauss, especialista em matemática, física e astronomia. O livro de Gauss era uma reunião das ideias de outros pesquisadores de matemática que tinham em comum o desejo de investigar a teoria dos números.

A teoria dos números tem como fator fundamental a aritmética modular que é trabalhada a partir de congruências. De acordo com o teorema da aritmética modular, toda congruência é a relação de dois números, tais que, divididos por um terceiro o resto de ambos serão iguais. A esse cálculo atribui-se o nome de congruência modular.

Enfim, este trabalho propõe mostrar uma relação entre Aritmética modular e o semáforo, sempre ressaltando que não será trabalhado o conteúdo de maneira completa, visto que os dois conteúdos são vastos. Nas próximas laudas vemos um pouco sobre a teoria dos números, algoritmo da divisão, o conceito de congruências e claro, problemas que podemos aplicar em nosso cotidiano a partir dos conceitos estudados nas laudas anteriores.

2 TEORIA DOS NÚMEROS

A teoria dos números é um ramo da matemática que estuda os números em geral, e em particular, os números inteiros e todos os problemas que surgem ao nos aprofundarmos nesse conteúdo. Muitas das modernas aplicações no campo da criptografia dependem de algumas das propriedades dos números inteiros e números primos.

2.1 NÚMEROS INTEIROS

Os números inteiros são constituídos de todos os números naturais, incluindo o 0 (0,1,2,3,...) e todos os números negativos simétricos aos naturais não nulos (...,-1,-2,-3,...). O conjunto desses números é representado por um **Z** em negrito, que vem do alemão Zahlen, que significa números, algarismos.

2.2 NÚMEROS PRIMOS

São considerados números primos todos os números inteiros que só podem ser dividido por dois inteiros, 1 e ele mesmo.

Ex: O número 17 é primo, pois só o número 1 e o próprio 17 que o dividem.

A Teoria dos Números é a mais pura disciplina dentro da mais pura ciência – a matemática – tem uma longa história, originando-se nas antigas civilizações humanas. O estudo das propriedades dos números tem exercido grande fascínio na mente humana desde a antiguidade, desafiando inúmeras gerações de matemáticos, que apreciam seus enunciados simples e intrigantes, cujas demonstrações estão além de qualquer simplicidade.

Os números foram utilizados nas transações comerciais por mais de 2000 anos até que se pensasse em estudá-los de forma sistemática, definindo números ímpares, pares etc. Na verdade, não são os números que exercem o fascínio estético, místico e prático, mas sim as relações que eles estabelecem entre si.

2.3 ALGORITMO DA DIVISÃO

Sejam D, d números inteiros e d> 0. Existem dois números inteiros únicos q, r tais que,

$$D = dq + r \; e \; 0 \leq r \leq b.$$

Identificamos a, q, b e r como:

D – Dividendo
d–Divisor
q – Quociente
r – Resto

Exemplo:

Para a = 100 e b = 7 temos q = 14 e r = 2 pois 100 = 7*14 + 2.

3 CONGRUÊNCIAS

Para iniciarmos o estudo sobre congruência, vejamos um exame de observação. Dada a função abaixo, o que podemos falar sobre a imagem da mesma?

$$f : Z \rightarrow Z, \qquad f(x) = x^2 + x + 1$$

Uma possível observação é que esta função só toma valores ímpares, para qualquer valor inteiro de x. Com esta informação, poderíamos solicitar o resto da divisão de *f(x)* por 3. Esta pergunta poderia ser fácil de responder se notarmos que, para qualquer valor inteiro x,

$$f(x + 3k) = (x + 3k)^2 + x + 3k + 1 = x^2 + x + 1 + 6kx + 9k^2 + 3k$$

podemos observar que se somarmos um certo *k* múltipo de 3, o valor de *f* por 3 também não muda, o único resto que dependerá é de x por 3. Como qualquer inteiro é igual a 0, 1 ou 2 mais um múltiplo de 3, para responder esta pergunta basta calcular $f(0) =1$, $f(1) = 3$ e $f(2) = 7$ e os respectivos restos são 1, 0 e 1 novamente. Concluímos que 2 nunca será resto desta divisão, de *f(x)* por 3, então *f* nunca tomará nenhum destes valores,

$$\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots$$

Naturalmente, o mesmo raciocínio pode ser aplicado a outro inteiro ao invés de 3 e do mesmo modo, a outra função

$$f : Z \rightarrow Z$$

Vamos definir agora uma notação adequada para problemas relacionados com estes conceitos de divisão, resto etc.

3.1 DEFINIÇÃO

Seja $m \in N$ e $n \neq 0$, um número fixo, dizemos que dois números, $a, b \in Z$ chamam-se congruentes módulos m, se $(a - b)$ é múltiplo de m.

Notação:

$$a \equiv b \ (\mathrm{mod} m) \Longleftrightarrow m \mid (a - b) .$$

Na 1ª notação lê-se: *a* é congruente a *b* módulo *m*. Na 2ª lê-se *m* divide *a* menos *b*.

Exemplos:

Para m = 6: $1 \equiv 7 \ (\mathrm{mod}\ m)$, pois $6 \mid (1 - 7)$.
Para m = 5 $117 \equiv 97 \ (\mathrm{mod}\ m)$, pois $5 \mid (117 - 97)$.

4 ARITMÉTICA MODULAR APLICADA AOS SEMÁFOROS

Para iniciarmos a aplicação do conceito da aritmética modular aos semáforos é preciso problematizar algumas situações. Com isso, conseguiremos aplicar todos os conceitos necessários de congruências. Antes de usarmos estas aplicações, devemos esclarecer cada elemento presente na congruência a partir da comparação com uma divisão qualquer. Abaixo podemos identificar os elementos de qualquer divisão de um número inteiro por outro.

Dividendo- $D \,\underline{\lfloor d}$ *- Divisor*

Resto- $r \quad q$ *- Quociente*

As congruências são formas pelos mesmos elementos da divisão.

$$\begin{array}{ll} \textit{divisor} & \\ \textit{Dividendo} & — \; a \equiv b \; (mod\; m) \\ \textit{resto} & \end{array}$$

Ainda falando sobre a divisão, é fácil perceber a relação existente entre os elementos que dela participam – dividendo, divisor, resto e quociente – relação esta que aprendemos ainda no ensino fundamental,

$$D = d.q + ra$$

que podemos substituir por $a = m.q + b$.

A partir deste pequeno resumo sobre congruência e divisão, podemos tentar aplicá-los em alguns problemas que iremos propor no decorrer deste artigo.

4.1 PROBLEMA 1

Se um semáforo de uma via movimentava funciona da seguinte maneira: abre e permanece aberto por 45 segundos e fecha por 45 segundos também (desprezando o sinal amarelo). Se um carro que passou por ele as 8h00m e retornará a passar pelo mesmo semáforo as 17h33m deste mesmo dia, ele o encontrará aberto ou fechado?

Para começarmos a resolver este problema, devemos mudar todos os tempos apenas para algum dos medidores de tempo, já que estão relacionados entre si nos problemas segundos, minutos e horas. Em uma simples soma, podemos dizer que o sinal abre a cada 90seg, pois se ele abre num exato momento, ele permanecerá 45seg aberto, depois mais 45seg fechado e só abrirá depois desses dois tempos somados. Sabido o período em que o sinal abre, obtemos uma congruência módulo 90.

$$a \equiv b \; (mod\; 90)$$

O próximo passo é saber quanto tempo existe no intervalo entre o horário de 8h00m até as 17h32m, tempo esse convertido em segundos. Cada hora tem 60 minutos e todos os minutos 60 segundos, numa conta rápida temos que 1 hora possui 3600 segundos.

O terceiro passo é saber quantas horas inteiras possuem no intervalo de tempo desejado, de 8 horas da manhã até as 5 horas da tarde, temos um intervalo de 9 horas completas, o que dá um total de 32.400 segundos. Sabemos que ainda faltam os 33 minutos do intervalo que não foram somados como hora inteira. Multiplicando

33 por 60, obtivemos 1.980 segundos, que somado ao resultado que já conseguimos anteriormente resulta num total de 34.380 segundos nesse intervalo.

Já temos o intervalo em segundos, agora vamos aplicar no conceito de congruência visto anteriormente,

$$\mathbf{34.380} = \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{(mod\ 90)}$$

.

Sendo "x" o resto da divisão entre 34.320 por 90, toda vez que o valor dele for 0, o sinal estará aberto na hora que foi colocada em questão. Dividindo 34.380 por 90 obtemos o resto 0, o que significa que o sinal abrirá neste horário. Caso obtivéssemos um resto menor que 45, o sinal estaria verde e o resto seria o tempo que já teria se passado com ele nessa cor. Se obtivéssemos um resto maior que 45, teríamos que o sinal já estaria fechado e o tempo passado com ele nesse estado seria exatamente o valor do resto. Caso o resto fosse exatamente igual a 45, teríamos que o sinal estaria fechando exatamente neste horário.

4.2 PROBLEMA II

Seguindo o mesmo raciocínio do problema anterior, poderemos resolver este segundo problema apenas descobrindo como funciona o sinal, sabendo em que intervalo de tempo o semáforo funciona e o horário exato que passará pelo mesmo. Neste problema, tentaremos expor uma situação que seja mais frequente em nosso cotidiano.

Um semáforo funciona da seguinte forma: durante 35 segundos ele está aberto (verde), nos próximos 5 segundos ele fica amarelo e durante 40 segundos ele permanece fechado (vermelho). Sabendo que 80 segundos é o ciclo de funcionamento deste semáforo. No caminho que João percorre para levar seu filho para a escola, ele passa exatamente às 7h00m da manhã por este semáforo e o mesmo abre exatamente nesse horário, permitindo que João siga para seu destino. João retornará para pegar o filho pouco tempo depois, às 11h05m, e passará novamente pelo mesmo sinal.

À tarde, João retornará a escola para levar seu filho para a atividade de educação física, nesse mesmo sinal ele passará às 14h. Tendo noção desse intervalo de tempo, o pai da criança quer saber em que estado estará o semáforo nos momentos em que ele passará e quanto tempo ele perderá, caso o sinal esteja fechado, esperando para seguir seu caminho.

Para resolver o problema devemos mudar o intervalo de tempo para segundos, já que o módulo está medido em segundos. Sabendo que o sinal abre a cada 80 segundos, pois abrindo em determinado tempo ele permanecerá por 40 segundos aberto, contando também o tempo que ele esta no amarelo, depois mais

40 segundos fechado e só abrirá depois desses dois tempos somados. Trazendo o momento em que este semáforo abre temos uma congruência modulo 80.

$$a = b \ (mod\ 80).$$

.Agora é necessário saber o tempo do intervalo entre 8h e 11h, tempo este que deverá ser convertido em segundos. Logo nesse intervalo de horas temos 14700 segundos, que aplicado ao conceito de congruência temos:

.

$$14700 = x \ (mod\ 80)$$

Sendo "x" o resto da divisão de 14700 por 80, toda vez que o valor de "x" estiver entre 0 e 35 o sinal estará vermelho. Entre os 35 e 40, o sinal estará amarelo. E se o sinal estiver entre 40 e 80 o sinal estará fechado. Lembrando que, se o resto for exatamente igual a 0, o sinal abriria nesse exato momento. Se o resto for igual a 35, o sinal mudará exatamente neste horário para o amarelo. Se for 40, o sinal fechará exatamente nesse horário. Calculando a congruência acima, teremos x = 60, ou seja, o sinal estará fechado.

O problema ainda diz que ele retornará à escola as 14h. Sabendo disto, devemos calcular um horário que o sinal irá se abrir. Complementando os restos até que o mesmo seja 0 (quando o resto for 0, o sinal abrirá exatamente no horário), e descobrimos que exatamente as 11h32m o sinal irá se abrir. Calculando o intervalo de tempo entre 11h32m e 14h, obtemos 8880 segundos. Fazendo a congruência deste horário, temos que descobre o resto desta divisão por 80.

$$8880 \equiv x \ (mod\ 80)$$

Resolvendo a congruência, temos que 0 é uma solução e no entanto, exatamente as 14h o sinal irá se abrir.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho nos permitiu examinar e conhecer profundamente a presença da aritmética modular em nosso cotidiano, e em particular, em situações relacionadas a semáforos, sendo capaz de resolver questões que possa ajudar em problemas relacionados a esta questão presente no nosso dia a dia.

Com as pesquisas e estudos relacionados ao tema deste artigo, ressaltamos que o objetivo principal proposto, aplicar o conceito das congruências no funcionamento dos semáforos, foi concluído com êxito. Apesar das situações problemas serem suposições, é possível ver a semelhança de tais exemplos com o cotidiano de várias pessoas que trafegam diariamente pelo mesmo percurso.

Em outra oportunidade futura, para complemento desse trabalho pode-se estudar outras aplicações da aritmética modular, como por exemplo, a criptografia, onde se abrira novas janelas, assim, permitindo-nos a relacionar a criptografia com a aritmética modular, e então dar continuidade a esse trabalho.

REFERÊNCIAS

JÚNIOR, Luís Armando dos Santos; NOGUEIRA, Antônio Carlos. Teoria dos Números e suas aplicações. Universidade Federal de Uberlândia. **FAMAT em revista**, abr, 2009. p. 12.

MAIER, Rudolf R. **Teoria dos números**. Universidade de Brasília. Departamento de Matemática. Disponível em: <http://www.mat.unb.br/~maierr/tnotas.pdf>. Acesso em: 18 set. 2014.

SÁ, Ilydio Pereira de. **Aritmética modular e algumas de suas aplicações.** Disponível em: <http://magiadamatematica.com/diversos/eventos/20-congruencia.pdf>. Acesso em: 18 set. 2014.

SIDKI, Said. **Introdução a Teoria dos Números.** Disponível em: <http://www.impa.br/opencms/pt/biblioteca/cbm/10CBM/10_CBM_75_09.pdf>. Acesso em: 18 set. 2014.

Só Matemática. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/coluna/gisele/25052001.php>. Acesso em: 20 out. 2014.

Data do recebimento: 05 de junho de 2015
Data da avaliação: 11 de junho de 2015
Data de aceite: 20 de junho de 2015

1. Graduando em Licenciatura em Matemática – UNIT. E-mail: marcinho399@hotmail.com
2. Graduando em Licenciatura em Matemática – UNIT. E-mail: gigamega_04@hotmail.com
3. Graduando em Licenciatura em Matemática – UNIT. E-mail: ian_rs15@hotmail.com
4. Graduando em Licenciatura em Matemática – UNIT. E-mail: kleber_cross15@hotmail.com